SECOND DEGRÉ

Première ES - Chapitre 3 - version sans démonstrations

Table des matières

I Fonctions polynômes du second degré

I 1 Forme développée (ou réduite)

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est une fonction **polynôme du second degré**, ou fonction trinôme du second degré, si et seulement si il existe des réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme est appelée la forme **développée** (ou réduite) de $f(x)$.

Remarque :
La forme développée d'une fonction polynôme du second degré est unique.

Vocabulaire :
• f est une fonction et $f(x)$ est un réel (c'est l'image de x par la fonction f). Ainsi, les phrases « $f(x)$ est une fonction du second degré » ou « $f = ax^2 + bx + c$ » sont **fausses**.
• Si a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$, alors $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **fonction polynôme** du second degré et $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un **polynôme** du second degré.

Exemples :
• $f : x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$.
• $g : x \mapsto 2(5 - x)(4x + 3)$. (Attention, ce n'est pas la forme développée de g ici)
• $h : x \mapsto 5x^2 + 2$.

Contre-exemples :
• $f : x \mapsto 2x + 1$ (Fonction polynôme du premier degré)
• $g : x \mapsto 3x^3$ (Fonction polynôme du troisième degré)
• $h : x \mapsto 5x^2 + \dfrac{1}{x}$ (Fonction rationnelle)

I 2 Égalité de deux trinômes

Propriété

Soient P et Q deux fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$, avec a, b, c, a', b' et c' des réels tels que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$.

Alors pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$.

Exemple :
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$.
Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 5 - 2(x - 3)^2$.

Remarque :
Ce résultat se généralise pour les polynômes de degré quelconque.

I 3 Forme canonique

Propriété & Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$. Alors pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f.

Remarque : En ES, on ne demande pas de retrouver cette formule à la main mais plutôt de démontrer une égalité donnée dans l'énoncé, comme dans l'exemple précédent.

Exemple :

Démontrer que la forme canonique du polynôme $3x^2 + 2x + 2$ est $3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$.

I 4 Variations et courbe représentative

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec a, α et β des réels et $a \neq 0$. Alors son tableau de variation est :

Si $a > 0$

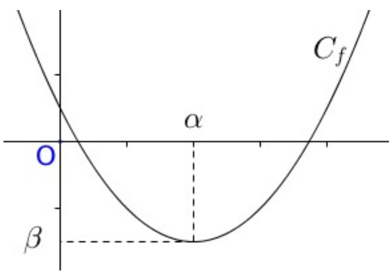
x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

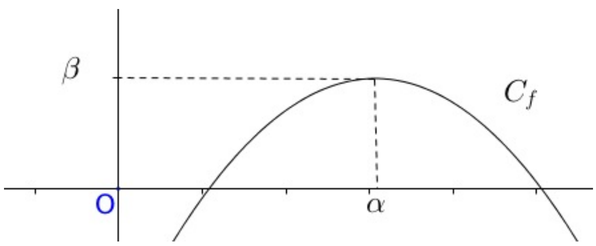
x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Représentation graphique :
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** de sommet le point $S(\alpha\,;\,\beta)$, et qui admet pour axe de symétrique la droite d'équation $x = \alpha$.

Si $a > 0$



Si $a < 0$



II Équations du second degré

II 1 Définition

Définition

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

II 2 Premiers exemples

On sait déjà résoudre certaines équations du second degré :

Ex 1 : $x^2=3$ $(b=0)$

Ex 2 : $4x^2-2x=0$ $(c=0)$

Ex 3 : $-5x^2=0$ ($b=0$ et $c=0$)

Ex 4 : $(3x+2)^2=0$ (carré nul)

Ex 5 : $x^2+5=0$ (pas de solution)

Ex 6 : $((4-5x)^2+3=0$ (idem, pas besoin de développer !)

Ex 7 : $x^2-2x+1=0$ (identité remarquable)

Ex 8 : $-2x^2+x+1=0$

Dans l'exemple 8, le membre de droite est nul et le membre de gauche est constitué de trois termes, sans facteur commun ni reconnaissance d'une identité remarquable. Comment résoudre cette équation ? En utilisant (pour le moment !) la forme canonique :

1. Montrer que la forme canonique de $-2x^2+x+1$ est $-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$.
2. En déduire une factorisation de $-2x^2+x+1$ à l'aide d'une identité remarquable.
3. Résoudre alors l'équation $-2x^2+x+1=0$.

Généralisation :

Il est possible de généraliser ce procédé pour tout polynôme du second degré. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2+\beta=0 && \text{(d'après la forme canonique vue auparavant)}\\
&\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0. && \text{(car } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=f(\alpha))\\
&\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} && \text{(on transpose à droite le deuxième terme)}\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{(on divise chaque membre par } a\neq 0)\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} && \text{(en posant } \Delta=b^2-4ac)
\end{aligned}$$

On remarque que pour tout réel x, $\left((x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$. Ainsi :

- Si $\Delta<0$, alors $\dfrac{\Delta}{(2a)^2}<0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, alors l'équation se ramène à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ d'où $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors $x+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc l'équation a deux solutions : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

II 3 Discriminant et énoncé du théorème

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Le réel $b^2 - 4ac$, noté Δ, est appelé le **discriminant de** f.

Théorème (démontré au-dessus !)

Soit a, b et c des réels, avec $a \neq 0$, et Δ le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.
Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta < 0$, alors (E) n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. On dit que cette solution est double.
- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque :
Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ et de l'axe des abscisses.

Vocabulaire :
Les **solutions** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$.
ATTENTION À NE PAS CONFONDRE CES DEUX MOTS DE VOCABULAIRE !

II 4 Exemples rédigés

Ex 1 (cas où $\Delta > 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$
Ex 2 (cas où $\Delta < 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 7x + 5 = 0$
Ex 3 (cas où $\Delta = 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 - 8x - 16 = 0$

Remarque : Lorsque l'on obtient $\Delta = 0$, cela signifie que l'on est passé à côté d'une identité remarquable (le vérifier avec l'Ex 3).

II 5 Forme factorisée

Propriété

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré, avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

III Signe d'un trinôme et inéquations du second degré

III 1 Conjecture graphique

Faire au tableau les trois configurations possibles si $a > 0$ puis si $a < 0$. et conjecturer oralement.

III 2 Énoncé du théorème

Théorème

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.
En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant (celui de a).

III 3 Inéquations du second degré

Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
Une inéquation du second degré à une inconnue x est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :
$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.
Pour résoudre une telle inéquation, on étudie le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$.
($\Delta = 12 > 0$ et $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ donc les solutions sont les réels de $[2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$.

IV Tableau de synthèse du chapitre

Distribuer la feuille polycopié à compléter par les élèves.